16 décembre - Mathieu Plancke

On cherche les n pour lesquels $\sum_{k=2}^{n} k!$ est un cube parfait.
On sait qu'un modulo très sympathique pour les cubes est 7.
On remarque que

$$\sum_{k=2}^{n} k! \equiv \sum_{k=2}^{6} k! + \sum_{k=7}^{n} k! \equiv \sum_{k=2}^{6} k! + 0 \pmod 7$$

On remarque que

$$\sum_{k=2}^{6} k! \equiv 2 + 6 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 20 + 6 \cdot 20 \cdot 6 \equiv 2 - 1 - 4 + 1 - 1 \equiv 4 \pmod 7$$

Mais un cube modulo 7 est -1 ou 0 ou 1 donc la somme n'est pas un cube pour $n \geq 7$ (même $n \geq 6$, vu qu'on vient de vérifier pour $n = 6$). Pour ceux restant, on peux reprendre le calcul qu'on a fait juste avant en enlevant le dernier terme : $\sum_{k=2}^{5} k! \equiv 2 - 1 - 4 + 1 \equiv 5 \pmod 7$, ce n'est pas un cube. $\sum_{k=2}^{4} k! \equiv 2 - 1 - 4 \equiv 4 \pmod 7$, ce n'est pas un cube. Les deux derniers cas donnent $\sum_{k=2}^{3} k! = 8 = 2^3$ et $\sum_{k=2}^{2} k! = 2$.

En conclusion, $\sum_{k=2}^{n} k!$ est un cube seulement pour $n = 3$